Université Mohammed V- Agdal **Année Universitaire 05-06**
Faculté des Sciences
Département de Physique

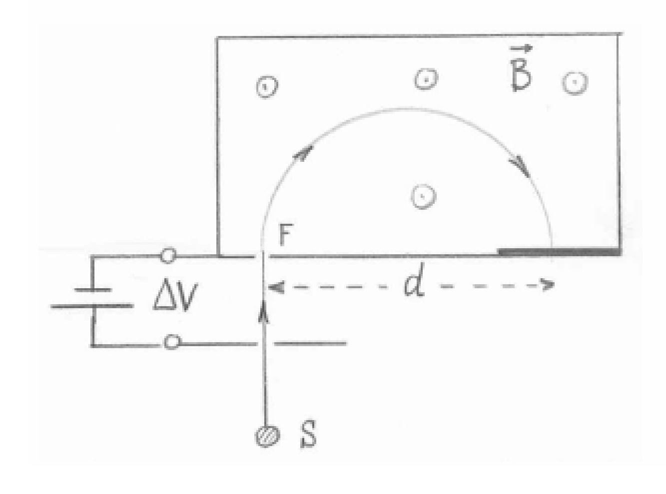
MECANIQUE - T.D.3
S.V. et S.T.U.

1/ La vitesse maximale des lames d'une tondeuse à gazon ne peut pas dépasser une valeur limite. Cette limite a pour but de réduire les dangers dus aux projections de pierres et autres débris. Un modèle de tondeuse disponible sur le marché a une vitesse de rotation de 3700 tours par minute. La lame a un rayon de 0.25 m.
a-Quelle est la vitesse linéaire de l'extrémité de la lame ?
b- Si la lame s'arrête en trois secondes avec une décélération constante, évaluer le nombre de tours qu'elle effectue au cours de cette décélération.

2/ Dans un modèle simple de l'atome d'hydrogène, on considère que l'électron se déplace autour du proton sur une orbite circulaire de rayon 5.29×10^{-11} m. La masse du proton vaut $M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg et celle de l'électron $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg.
a- Que valent les forces électriques et gravitationnelle exercées par le proton sur l'électron ? Conclure.
b- Déterminer l'accélération et la vitesse de l'électron dans l'atome d'hydrogène ainsi que le nombre de révolutions effectuées par seconde.

3/ Imaginons que les globules rouges soient de petites sphères de rayon R =2 μm et de masse volumique ρ = 1300 g/ℓ .
Comparer leur poids à la force centrifuge que produit une centrifugeuse de vitesse de rotation égale à 10^4 tours/min et de rayon 10 cm ? Conclure

4/ La figure ci-dessous montre schématiquement un spectromètre de masse. La source S produit des ions positifs de charge +2e (+ e est la charge du proton = 1.602 10^{-19} C) et de masse inconnue M. Les ions sont accélérés par une tension électrique pour atteindre une vitesse V=3.1 10^5 m/s. Après le passage de la fente F, ils sont soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ de 0.1 T. ($\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de la figure). Dans $\vec{B}$ ils décrivent une trajectoire semi-circulaire et sont enregistrés sur un écran à une distance d = 13 cm de A.
Quelle est la masse M des ions ?
De quel ion s'agit-il ? On rappelle que la masse d'un proton est égale à M_p= 1.67 10^{-27} Kg



5/ Soit un satellite de masse m en orbite autour de la terre (de masse M_T)
r étant le rayon de l'orbite circulaire.

a/ A partir de la 2ème loi de Newton, déterminer l'accélération du satellite.

b/ Déterminer la vitesse du satellite.

c/ Montrer qu'on a : $T^2 = C\, r^3$ appelée 3 ème loi de Kepler
C est une constante qu'on déterminera.

d/ Quelle doit-être l'altitude h, par rapport à la surface terrestre, pour que le satellite ait une période de 24 h. Commenter

Données numériques: $M_T = 6\ 10^{24}$ Kg, R = 6400 km, m = 1000 Kg,
$G = 6{,}7\ 10^{-11}$ S.I.,

6/ Déterminer la vitesse V et la vitesse angulaire ω qu'un avion qui vole à l'équateur à une hauteur de 5000 m doit avoir pour voir le soleil fixe à l'horizon. L'avion doit voler vers l'est où vers l'ouest?

7/ Vous faites tourner (avec une vitesse uniforme) une pierre attachée à l'extrémité d'une corde de longueur R égale à 1.2 m dans un plan horizontal situé à une hauteur h égale à 1.8 m du sol. La corde casse et la pierre touche le sol à une distance L égale à 9.1 m de vos pieds.
Quelle est la valeur de l'accélération centripète a_c pendant le mouvement circulaire de la pierre?

8/ Déterminer l'équation du mouvement d'une masse m accrochée à un ressort horizontal.
A t = 0 , on écarte la masse de sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale.

9/ Résoudre l'équation différentielle du mouvement oscillatoire amorti.
Discuter le résultat obtenu selon l'importance du coefficient d'amortissement.

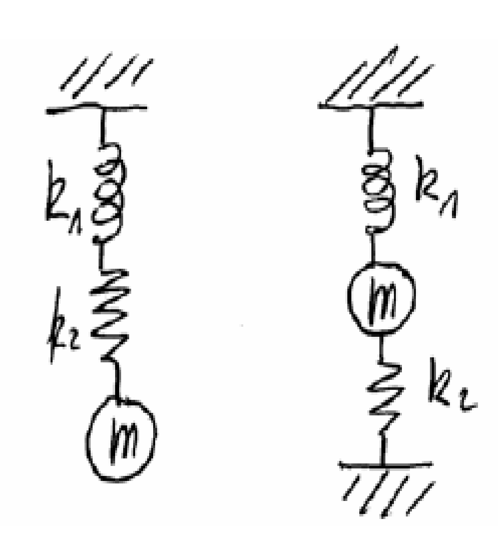
10/ Une particule pénètre avec une vitesse V_0 dans un milieu visqueux caractérisé par un coefficient de frottement β. Si m est la masse de la particule, que vaut la distance de pénétration L dans ce milieu.

A.N.: V_0= 10 m/s, m= 1 g et β= 200 g/s

11/ Déterminer en négligeant le frottement :

a- L'élongation à l'équilibre

b- La fréquence propre d'oscillation des deux oscillateurs ci-contre.



12/ Imaginer un tunnel traversant complètement la terre le long d'un diamètre. A une extrémité du tunnel, on lâche une masse m avec une vitesse nulle.

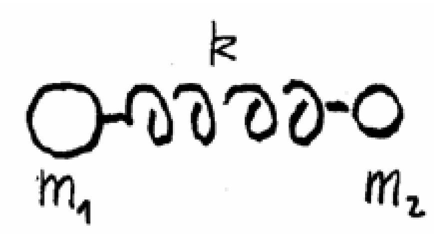
a- Ecrire l'équation du mouvement de m et montrer que son mouvement est une oscillation harmonique.

b- Que vaut la période T du mouvement ?

13/ Une molécule diatomique peut être envisagée comme un système de deux masses m_1 et m_2 interagissant par l'intermédiaire d'un ressort de constante élastique K.

a- Montrer que la fréquence propre d'oscillation de la molécule est donnée par :

$\upsilon_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$ Où $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ est la masse réduite de la molécule.



14/ La fréquence propre d'oscillation de deux oscillateurs harmoniques identiques de masse m= 0.2 Kg vaut υ_0= 2 Hz. En couplant les deux oscillateurs avec un ressort de constante k' on observe un battement de période T_B= 10 s.

a- Que vaut k' ?

b- Si on réduit la masse m d'un facteur 2, comment faut-il choisir k' pour que T_B ne change pas ?

Corrigé de la série n°3
Mouvements circulaire et oscillatoire

1/ ω_0 = 3700 tours/min = (3700 x 2π)/60 rad/s = 387 rad/s

a- V = rω **A.N.:** V = 97 m/s

b- On a: $\omega^2 - \omega_0^2$ = 2 α Δθ et $\alpha\, t = \omega - \omega_0$ d'où: $\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)\, t$

AN: ω = 0 rad/s et t = 3 s d'où: Δθ = 581 rad

Le nombre de tours est N = Δθ/2π **AN :** N = 581/2π = 92,47

2/ Le volume d'une sphère est $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Le poids P est donné par P = m g = ρ $\mathcal{V}$ g = ρ $\frac{4}{3}\pi R^3$ g

A.N. : P = 4,4 10^{-13} N

Quant à la force centrifuge F_C, elle est donnée par : $F_C = m\,\omega^2\, r = \rho\, \frac{4}{3}\pi R^3\, \omega^2\, r$

AN : F_C = 4,8 10^{-9} N

On voit que F_C est très grande devant P : $F_C = 10^4$ P.

Sous l'effet de F_C, la sédimentation sera rapide: C'est l'intérêt des centrifugeuses.

3/ a- La force électrostatique (force exercée par le proton sur l'électron) vaut :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e^2}{r^2}\frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}$$

Où O est le centre du repère confondu avec le proton et r est la distance qui sépare l'électron du proton.

La même force est exercée par l'électron sur le proton (3 ème loi de Newton).

AN : $|\vec{F}| = 8{,}2\ 10^{-8}$ N

Quant à la force gravitationnelle exercée par le proton sur l'électron, elle vaut :

$$\vec{F}_G = \frac{-GMm}{r^2}\frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}$$

AN : $|\vec{F}_G| = 3{,}6\ 10^{-47}$ N

$|\vec{F}_G| << |\vec{F}|$: En physique de l'atome, on négligera toujours la force gravitationnelle devant la force électrostatique.

b- L'application de la 2 ème loi de Newton nous donne :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e^2}{r^2}\frac{1}{m}\frac{\vec{OM}}{\left|\vec{OM}\right|}$$

L'accélération est dirigée vers O : elle est donc centripète (ou radiale) $\vec{a}//\vec{OM}$.
AN : a = 9 10^{22} m/s^2.

Le mouvement est circulaire uniforme : a = $\frac{V^2}{r}$ où V est la vitesse de l'électron.

AN : V = 2,2 10^6 m/s.

Quant à la fréquence f, elle est donnée par : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{V}{2\pi r}$

AN : f = 6,6 10^{15} Hz.

4/ Une charge q de vitesse $\vec{V}$ placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ sera soumise à la force de Laplace: $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$

Dans cet exercice $\vec{V} \perp \vec{B}$: $\left|\vec{V} \wedge \vec{B}\right| = VB$

L'ion décrit un arc de cercle à vitesse constante : l'accélération est centripète et vaut $\frac{V^2}{r}$ avec $r = \frac{d}{2}$

Par application de la 2 ème loi de Newton, on obtient :

$$qVB = M\frac{V^2}{r} = 2M\frac{V^2}{d} \Leftrightarrow M = \frac{qBr}{V}$$

AN. : M = 6,7 10^{-27} Kg = 4 M_P (M_P masse du proton)
La masse de l'ion (de charge ++) M est égale à 4 fois la masse du proton. L'ion est l'Hélium doublement ionisé H_e^{++} : C'est la particule α.

5/ Soit O le centre de la terre, m la masse du satellite et r=OM : distance entre le satellite et le centre de la terre.
r= h+R_T où R_T est le rayon de la terre et h l'altitude
a- Par application de la deuxième loi de Newton : ma= G M_T/r^2

b- à r=cte, l'accélération est constante
On a V2/r = G M_T/r^2 d'où V(r) = G M_T/r

c- V=r ω et T=$2\pi/\omega$ d'où T^2=C r^3 avec C= $4\pi^2/GM_T$
C'est la troisième loi de Kepler.

d- r = h+R_T $\Leftrightarrow$ h= - R_T+ $(GM_T\, T^2/4\pi^2)^{1/3}$
A.N.: h= 35775 Km

6/ Pour voir le soleil fixe à l'horizon, il faut que l'avion ait une vitesse angulaire égale à celle de la terre mais de sens opposé.

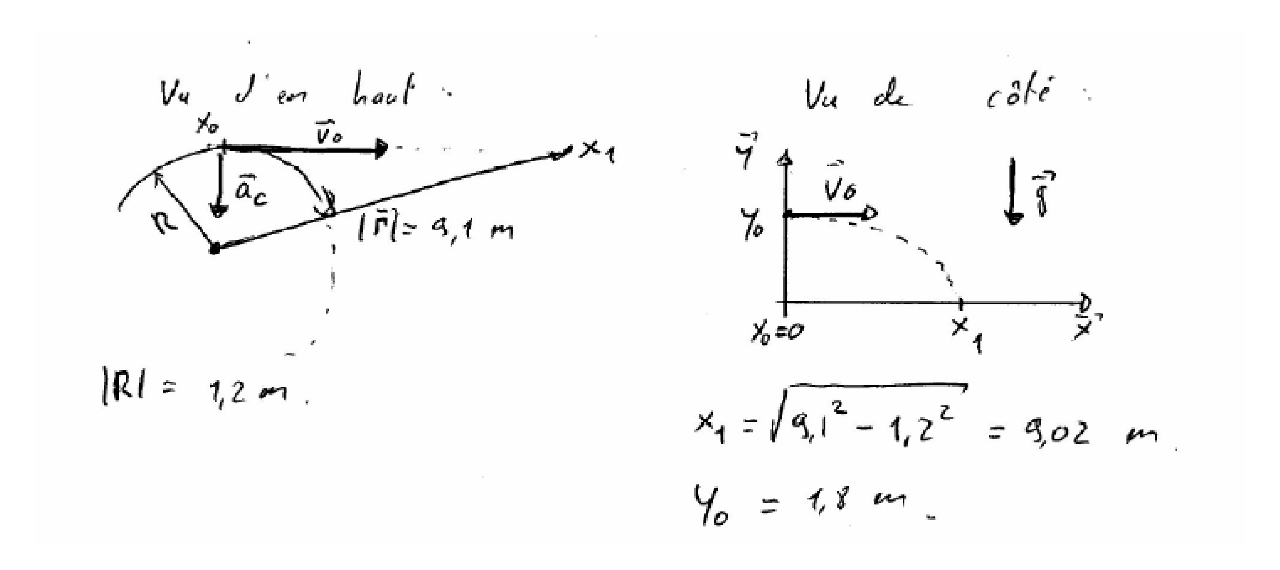
$\omega_{Terre} = \frac{2\pi}{T}$ où $T = 24\,h$

Quant à la vitesse linéaire, elle est donnée par : $V = r\omega_{Terre} = r\frac{2\pi}{T} = (R_T + h)\frac{2\pi}{T}$

R_T est le rayon de la terre et h est l'altitude

A.N. : $V = 465.8\,m/s = 1677$ km/h

7/



Suivant OY : $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$

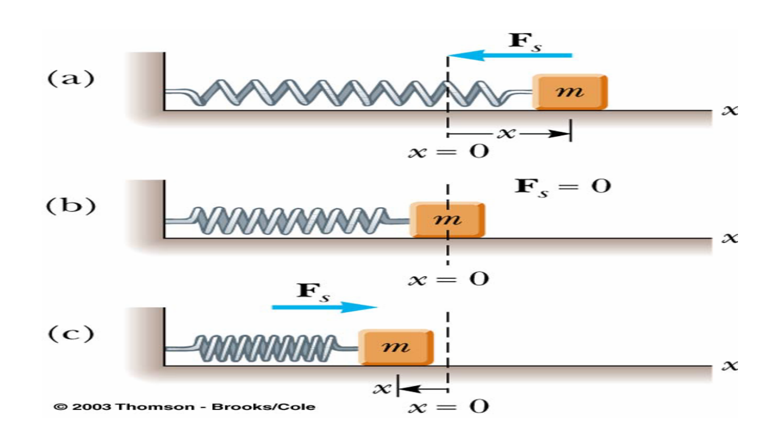
Lorsque la pierre touche le sol, $y(t) = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{2}gt^2$ **A.N. :** t = 0.61s

Suivant OX : $x(t) = V_x t$

A t = 0.61 s : $V_x = \frac{9.1}{0.61} = 14.92\,m/s$

L'accélération centripète vaut : $a_c = \frac{V^2}{R}$ **A.N. :** $a_c = 185.5\ m/s^2$

8/ Equation d'une masse m accrochée à un ressort horizontal



En l'absence de frottement, le poids de m est compensé par la réaction du support. Il reste la force de rappel du ressort.

Comme en cours : $-k\,x + m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$

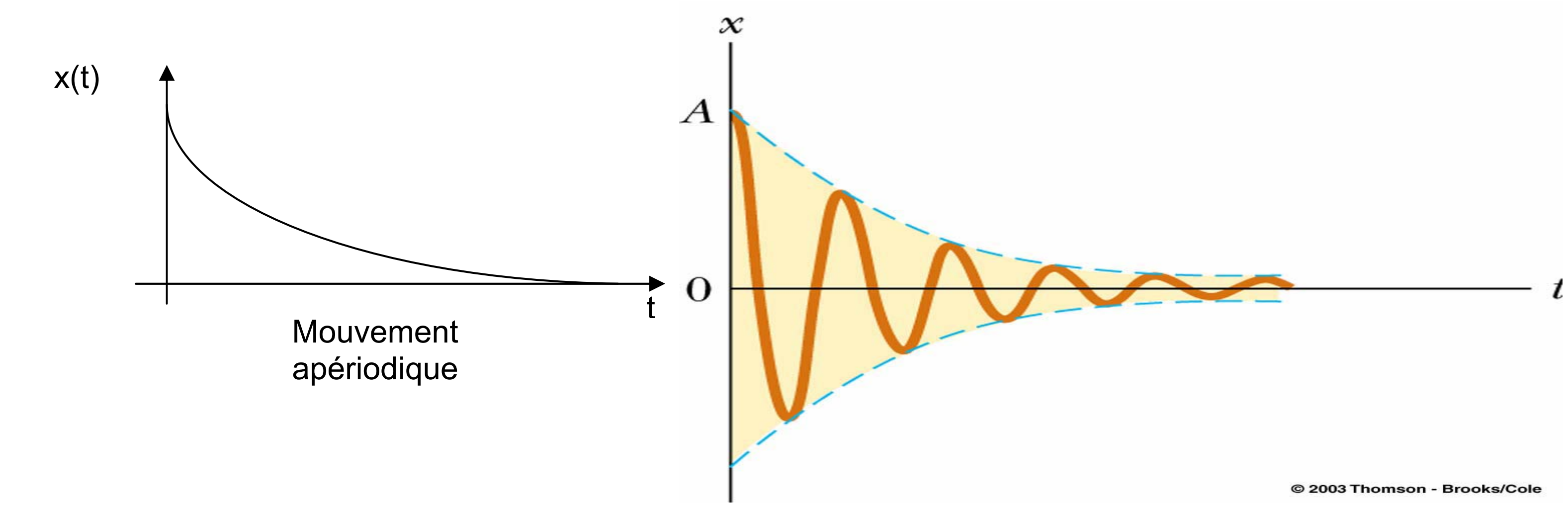
C'est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

9/ Mouvement oscillatoire amorti

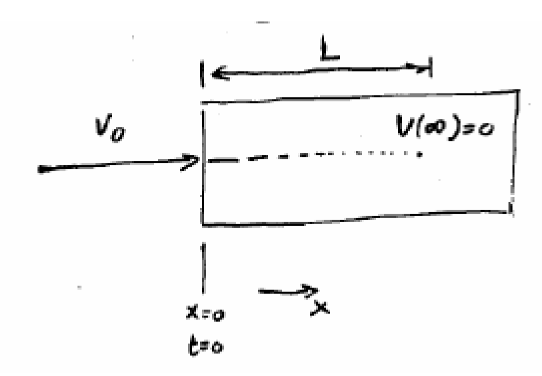
Le mouvement harmonique simple est un cas idéal. En effet, les forces de frottement interviennent pour amortir les oscillations.
L'amplitude de l'oscillation baisse plus ou moins rapidement jusqu'à s'annuler, sauf si on applique une force pour compenser les pertes causées par les frottements qui sont des forces dissipatives. Ces dernières notées $\vec{F}_d$ sont généralement proportionnelles à la vitesse $\vec{V}$: $\vec{F}_d = -\lambda\,\vec{V}$
Où λ est une constante positive appelée coefficient d'amortissement.

A une dimension : $F = -\lambda\,\dot{x}$

La 2ème loi de Newton devient : $-k\,x - \lambda\,\dot{x} = m\,\ddot{x}$
C'est une équation différentielle du 2ème ordre linéaire, à coefficient constants et sans second membre.
Si le frottement est très important, l'amplitude s'annule très vite : c'est le mouvement apériodique. Dans le cas contraire, on obtient un mouvement pseudo-périodique ayant une pseudo-période T = T0/ ?.



10/



On a : $\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow -\lambda\vec{v} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

A une dimension : $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{\lambda}{m}dt$

Par intégration et en tenant compte du fait que $v=v_0$ à $t=0$: La vitesse dans un milieu visqueux est donnée par : $V(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$ avec $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$

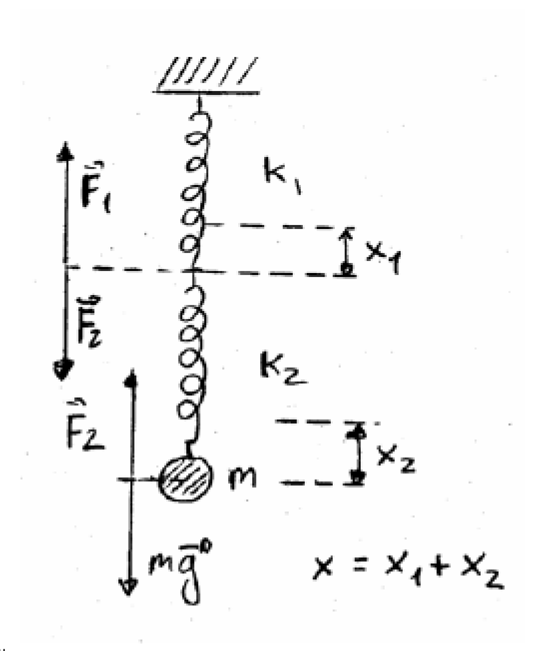
Déterminons la distance parcourue après un temps infini :

L = $\int_0^\infty V(t)dt = V_0\int_0^\infty \exp(-t/\tau) = V_0\tau$

Or L = $V_0\tau = V_0\dfrac{m}{\lambda}$ **A.N. :** L = 5 cm

11/

<u>Cas n°1</u> :



A l'équillibre: $\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$

$K_1 x_1 = F_1$ et $K_2 x_2 = F_2 = mg$ D'où : $F_1 = mg$

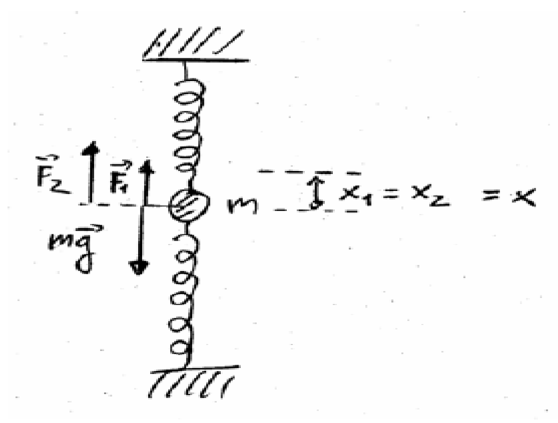
En combinant les équations, on obtient : $x_1 + x_2 = mg\dfrac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$

Si on remplace $x_1 + x_2 = x$ et $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$, on peut écrire : $kx + mg = 0$

Hors équilibre, on a : $\dfrac{k}{m}x + \ddot{x} = 0$: c'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{1}{m}}\sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$ et de fréquence $\upsilon_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{m}}\sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$

<u>Cas n°2</u> :



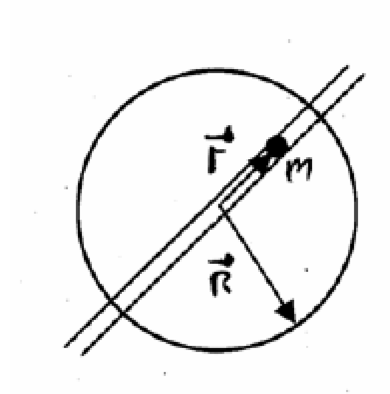
A l'équillibre: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -m\vec{g}$ ou $F_1 + F_2 = mg$

Or $x_1 = x_2 = x$, d'où : $x_1 = \dfrac{mg}{k_1 + k_2}$ d'où : $(k_1 + k_2)x + mg = 0$

Hors équilibre, on a : $\dfrac{k_1 + k_2}{m}x + \ddot{x} = 0$: C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$ et de fréquence $\upsilon_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$

12/



On $\vec{F} = m\vec{a}$ où $a = \dfrac{GM_T(r)}{r^2}$

$M_T(r)$ étant la masse de la terre quand l'objet est à une distance r inférieure à R_T rayon de la terre.

Or $M_T(r) = \dfrac{M_T r^3}{R^3}$ d'où : $a = \dfrac{GM_T r}{R^3}$

L'équation du mouvement est alors donnée par : $m\dfrac{d^2r}{dt^2} = m\dfrac{GM_T r}{R^3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{d^2r}{dt^2} = kr$ où $k = \dfrac{GM_T}{R^3}$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM_T}}$

Comme $g_0 = \dfrac{GM_T}{R^2}$ est l'accélération de la pesanteur à la surface terrestre, on peut écrire : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g_0}}$ **A.N. :** T= 5075 s = 1 h 24 min 35 s

13/ Pour chaque masse, on a : $m\vec{a} = \vec{F}$ avec $\vec{F} = -k\vec{d}$



Posons : $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \vec{d}$

$$m_1\frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = +k\vec{d} \qquad (1)$$

$$m_2\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = -k\vec{d} \qquad (2)$$

(2) x m_1 - (1) x m_2

$$m_1 m_2\left[\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2}\right] = -k\vec{d}(m_1 + m_2)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d^2\vec{d}}{dt^2} = -k\,\vec{d}\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ où $\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$.

μ est appelée masse réduite